

1. Das Anpacken von Problemen

In diesem Kapitel will ich Ihnen zeigen, wie Sie an eine konkrete Aufgabenstellung herangehen können. Es gibt keinen Grund, vor einem bestimmten Problem von vornherein zurückzuschrecken und ohne jede Hoffnung ein leeres Stück Papier anzustarren. Auf der anderen Seite ist es auch nicht sinnvoll, mit Brachialgewalt den ersten besten halbwegs aussichtsreich erscheinenden Weg zu beschreiten. Es gibt aber in der Tat einige Dinge, die Sie tun können.

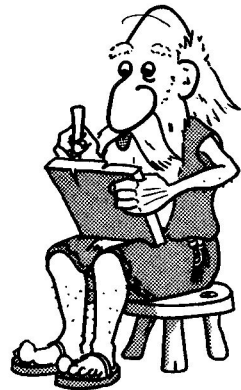
Betrachten Sie Spezialfälle!

Ich beginne am besten mit einem konkreten Beispiel:

KAUFHAUS

In einem Kaufhaus bekommen Sie 20% Rabatt, müssen aber 15% Umsatzsteuer zahlen. Was wäre für Sie günstiger: sollte man zuerst den Rabatt abziehen oder sollte man zuerst den Steueraufschlag vornehmen?

Wie soll man an eine derartige Fragestellung herangehen? Zunächst einmal muß man sich natürlich darüber im klaren sein, was überhaupt gefragt ist. Das allein ist freilich nicht ausreichend; Sie müssen sich zuerst einmal ein bißchen mit dem Problem vertraut machen. Dazu ist es am zweckmäßigsten, wenn Sie das Ganze einmal für verschiedene Preise durchspielen. Sicher ist es besonders naheliegend, zuerst einmal von einem Betrag von 100 DM auszugehen, denn damit läßt sich besonders leicht rechnen.



----- Machen Sie das, falls Sie es nicht bereits getan haben! -----
Wundert Sie das Ergebnis? Die meisten Leute sind in der Tat überrascht, und gerade dieses Gefühl der Überraschung ist der Motor für die weitere Vorgehensweise. Jetzt ist es natürlich naheliegend, zu

prüfen, ob bei einem Betrag von 120 DM dieselbe Beobachtung zu machen ist.



----- Machen Sie einen Versuch, und ziehen Sie daraus Schlüsse! -----
Schreiben Sie Ihre Rechenschritte detailliert auf, und kommentieren Sie die gewonnenen Erkenntnisse. Nur so steigern Sie Ihre Denkfähigkeit.



----- Machen Sie einen Versuch, und ziehen Sie daraus Schlüsse! -----

Als nächstes können Sie - vielleicht gestützt auf einen Taschenrechner - einige andere Zahlenwerte durchspielen. Damit können Sie ein zweifaches Ziel verfolgen: zum einen bekommen Sie ein Gefühl für die mögliche Lösung des Problems, zum anderen können Sie dadurch Ihre Hypothese erhärten. Anders ausgedrückt können Sie also durch das Betrachten von Beispielen einen Bezug zu der Aufgabe herstellen und ein zugrundeliegendes Muster aufspüren. Dieses kann dann der Schlüssel zur eigentlichen Lösung sein.

Wie könnte dieses Muster nun im vorliegenden Fall aussehen? Vielleicht haben Sie Erfahrung in der Bearbeitung von derartigen Aufgaben und wissen demzufolge, was zu tun ist. Sollte dies der Fall sein, so stellen Sie sich doch einfach auf den Standpunkt, daß Sie einer unerfahrenen Person erklären sollen, wie vorzugehen ist. Lesen Sie erst danach meine Vorschläge durch. Es ist auf alle Fälle wichtig, daß Sie meine Anregungen durcharbeiten, denn gerade in diesen finden meine Vorschläge zur mathematischen Arbeitsweise ihren Niederschlag.

Wie hängt der Endpreis von der Reihenfolge der Berechnung von Rabatt und Steuer ab? Sie sollten an Hand der von Ihnen durchgerechneten Beispiele eine Vermutung haben. Ist das nicht der Fall, so sollten Sie Ihre Ergebnisse noch einmal nachrechnen. Wenn Sie eine Vermutung haben, müssen Sie sich fragen, ob diese tatsächlich für jede beliebige Ausgangssituation zutrifft. Sollten Sie unsicher sein, so rechnen Sie weitere Beispiele durch. Sind Sie sich dagegen sicher, so versuchen Sie, eine Erklärung zu finden (oder lesen Sie weiter).



----- Rechnen Sie so lange Beispiele, bis Sie sich sicher sind -----

Für das weitere hängt nun sehr vieles davon ab, in welcher Form Sie Ihre Rechnungen niedergeschrieben haben. Sollten Sie zuerst den Rabatt und dann den Steueraufschlag in Ansatz gebracht haben, so könnte das etwa so aussehen:

Rabatt berechnen	bei 100 DM sind das 20 DM;
abziehen vom Preis	$100 \text{ DM} - 20 \text{ DM} = 80 \text{ DM};$
Steuer berechnen	15% von 80 DM sind 12 DM;
Endpreis	$80 \text{ DM} + 12 \text{ DM} = 92 \text{ DM} .$

Suchen Sie so lange andere Rechenwege, bis Sie einen verallgemeinerungsfähigen gefunden haben. Naheliegender ist es natürlich, einen Weg zu suchen, der von der Wahl des Ausgangsbetrags unabhängig ist. Versuchen Sie daher nachzurechnen, welchen Prozent-Wert des Ausgangsbetrages Sie berechnen müssen, wenn Sie zuerst den Rabatt abziehen und danach die Steuer hinzufügen.



----- Führen Sie das durch! -----

Wenn Sie sich nicht vertun, so erhalten Sie folgende Resultate:

- a) Wenn Sie 20% des Ausgangspreises abziehen dürfen, so läuft das darauf hinaus, daß Sie 80% zu bezahlen haben.
- b) Wenn Sie 15% Steuer zahlen müssen, so haben Sie 115% des vorliegenden Betrages zu bezahlen.

Bei einem Ausgangsbetrag von 100 DM errechnet sich in unseren beiden Fällen der Endbetrag wie folgt:

$$\text{Rabatt zuerst:} \quad 1.15 \times (0.80 \times 100 \text{ DM})$$

$$\text{Steuer zuerst:} \quad 0.80 \times (1.15 \times 100 \text{ DM})$$

Wenn Sie die Rechnung in dieser Form hinschreiben, sehen Sie sofort, daß es auf die Reihenfolge von Rabatt- und Steuerberechnung nicht ankommt. Das ganze Problem reduziert sich vielmehr darauf, den ursprünglichen Preis mit zwei Zahlen zu multiplizieren, und das kann natürlich in jeder beliebigen Reihenfolge geschehen. Haben wir einen Ausgangsbetrag von P DM, so ergeben sich die Endbeträge:

$$\text{Rabatt zuerst:} \quad 1.15 \times 0.80 \times P \text{ DM}$$

$$\text{Steuer zuerst:} \quad 0.80 \times 1.15 \times P \text{ DM}$$

Diese Beträge sind immer gleich.

Achten Sie besonders darauf, wie nützlich es war, von konkreten Details der Rechnung zu abstrahieren und ihren wesentlichen Gehalt herauszupräparieren. Derartige Überlegungen sind grundlegend für die mathematische Arbeitsweise.

An Hand von KAUFHAUS können Sie einige wesentliche Hilfsmittel für erfolgreiches Vorgehen in der Mathematik erkennen. Zwei davon möchte ich ganz besonders herausstreichen. Zum einen gibt es ganz bestimmte Methoden, die immer wieder nützlich sind. In diesem Fall war es besonders geschickt, Spezialfälle zu betrachten, d.h.: das vorliegende Problem für einige konkrete Beispiele zu studieren. Die gewählten Beispiele sind insofern Spezial-



fälle, als sie nur Teilaspekte des Gesamtproblems sind. Zum zweiten ist es so, daß es ganz natürlich ist, wenn man zunächst einmal hängenbleibt und stutzt. Normalerweise kann man dagegen aber etwas tun. In unserem Fall war es beispielsweise angebracht, einige Spezialfälle zu betrachten. Diese Vorgehensweise ist ganz einfach, und jedermann kann ihr folgen. Sollte jemand bei einer Fragestellung überhaupt nicht weiterkommen, so helfen häufig Fragen der Art:

Haben Sie dazu schon ein Beispiel gerechnet?

oder

Was passiert in einem bestimmten Spezialfall?

Das nächste Beispiel zeigt Ihnen eine andere Form, Spezialfälle zu betrachten. Es stammt von Barwell, Saunders und Tahta (1972).

PAPIERSTREIFEN:

Stellen Sie sich vor, daß direkt vor Ihnen von links nach rechts ein langer dünner Papierstreifen liegt. Stellen Sie sich weiterhin vor, daß Sie diesen an den Enden anfassen und die rechte Hand über die linke legen. Falten Sie nun den Streifen in der Mitte, und drücken Sie ihn wieder flach; dadurch entsteht eine Faltkante. Führen Sie diese Operation mit dem so entstandenen Streifen erneut zweimal durch. Wieviele Faltkanten liegen dann vor? Wieviele sind es, wenn Sie diese Operation insgesamt 10mal durchführen?



----- Versuchen Sie es! -----

Schwierigkeiten?

Zählen Sie im Kopf die Zahl der Faltkanten nach zwei Versuchen. Vielleicht hilft es Ihnen, wenn Sie eine Zeichnung anfertigen. Führen Sie den Vorgang in der Praxis durch. Studieren Sie die Situation nach 3- bzw. 4maligem Falten, und versuchen Sie eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen. Formulieren Sie klar und präzise die Fragestellung. Gibt es etwas, was eng mit den Faltkanten verknüpft ist, aber leichter ausgezählt werden kann? Testen Sie alle Ihre Vermutungen an weiteren Beispielen.

Ich will Ihnen hier nicht die vollständige Lösung für dieses Problem verraten. Seien Sie nicht irritiert, wenn Sie nicht weiterkommen. Sie werden von dieser Situation nur dann profitieren, wenn Sie sie als Chance ansehen, etwas daraus zu lernen. Vielleicht können Sie das Problem mit neuer Energie angehen, nachdem Sie das nächste Ka-

pitel durchgearbeitet haben. Bevor Sie aber Ihre Lösungsversuche einstellen, sollten Sie die Situation mindestens bis zu viermaligem Falten durchspielen. Dabei spielt es keine Rolle, ob Sie das im Kopf, an Hand eines konkreten Papierstreifens oder mit Hilfe von geeigneten Zeichnungen machen. Zählen Sie die Faltkanten und protokollieren Sie Ihre Ergebnisse in einer kleinen Tabelle. Als wir uns mit KAUFHAUS beschäftigt haben, bedeutete Spezialisierung den Übergang zu einer Reihe von Beispielen; hier dagegen ist es ratsam, in irgendeiner Form Versuche anzustellen. Es ist immer wichtig, solche Objekte heranzuziehen, die Sie im Griff haben. Dabei kann es sich um ganz konkrete Gegenstände oder auch um mathematische Begriffsbildungen wie Zahlen, algebraische Symbole oder Diagramme handeln. Natürlich werden Sie nur die wenigsten Fragen allein durch geeignete Spezialisierungen lösen können; auf alle Fälle bekommen Sie aber ein gewisses Gefühl für die zugrundeliegende Problematik. Dadurch wirkt die Aufgabe nicht mehr so unzugänglich und abschreckend. Außerdem können Sie an Hand der Spezialfälle häufig ungefähr erraten, wie die Lösung aussieht. Wenn Sie dann weiterhin geschickte Spezialfälle heranziehen und dabei stärker auf das Warum als auf das Wie achten, kann dies zu der Einsicht in den tatsächlichen Sachverhalt führen.

Die nächste Fragestellung ist Ihnen wahrscheinlich geläufiger:

PALINDROME:

Unter einem Palindrom versteht man eine Zahl, die vorwärts wie rückwärts gelesen denselben Wert hat. Ein typisches Beispiel hierfür ist 12321. Ein Freund von mir behauptet, daß alle Palindrome mit 4 Ziffern durch 11 teilbar seien. Hat er recht?



----- Probieren Sie es aus! -----

Schwierigkeiten?

- Betrachten Sie einige Palindrome mit 4 Ziffern.
- Glauben Sie meinem Freund?
- Was möchten Sie nachweisen?

Eine Lösung:

Hier kann man praktisch nur so vorgehen, daß man einige Versuche anstellt. Zunächst einmal möchte ich ein Gefühl dafür bekommen, mit was für Zahlen ich es hier zu tun habe. Offenbar ist 88 ein Palindrom, aber auch 6 und 747 fallen in diese Kategorie. Bei unserem Problem haben wir es aber nur mit Palindromen mit 4 Ziffern zu tun,

also etwa mit

1221, 3003, 6996, 7557.

Was ist mein Ziel? Nun, ich will wissen, ob alle diese Zahlen durch 11 teilbar sind oder nicht.



----- Probieren Sie es aus! -----

Nachdem ich mehrere Beispiele durchprobiert habe, bin ich zu der Überzeugung gelangt, daß mein Freund recht hat. Beachten Sie aber, daß ich meiner Sache durchaus noch nicht sicher sein kann. Solange ich nicht tatsächlich jedes Palindrom mit 4 Ziffern auf seine Teilbarkeit durch 11 untersucht habe, kann ich nur auf Grund von Beispielen nicht zu einem sicheren Ergebnis kommen. Da es etwa 90 solche Palindrome gibt, ist es sicher besser, eine allgemeine Lösungsstrategie zu entwickeln.



----- Suchen Sie eine Lösungsstrategie! -----

Ich selbst habe vier Versuche angestellt:

$$1221/11 = 111,$$

$$3003/11 = 273,$$

$$6996/11 = 636,$$

$$7557/11 = 687,$$

konnte daraus aber keine allgemeine Gesetzmäßigkeit ableiten. Das zeigt eine grundlegende Problematik beim Spezialisieren auf. Wenn man die Beispiele rein willkürlich wählt, bekommt man natürlich ein gutes Gefühl dafür, was passiert. Man kann sehen, ob eine Behauptung wahrscheinlich wahr ist, möglicherweise hat man auch Glück und findet ein Gegenbeispiel. Sucht man allerdings nach einer Gesetzmäßigkeit, so dürfte ein völlig planloses Vorgehen in aller Regel nicht weiterhelfen. Doch wie können wir im vorliegenden Fall systematisch vorgehen?



----- Versuchen Sie es! -----

Schwierigkeiten?

••••• Welches vierziffrige Palindrom ist am kleinsten?

••••• Welches ist das zweitkleinste?

••••• Wie kann man ein Palindrom in ein anderes überführen?

Eine Möglichkeit besteht darin, vom kleinsten vierziffrigen Palindrom, nämlich von 1001 auszugehen und danach immer zum nächstgrößeren überzugehen:

1001, 1111, 1221, 1331, ...

Nun kontrolliere ich die Behauptung meines Freundes:

$$1001/11 = 91$$

$$1111/11 = 101$$

$$1221/11 = 111$$

$$1331/11 = 121$$

Diese Rechnungen stützen nicht nur die Behauptung meines Freundes, sondern eröffnen darüber hinaus weitere Perspektiven. Offenbar ist es doch so, daß das jeweils nächste Palindrom immer um 110 größer ist als sein Vorgänger und daß die Quotienten jedesmal um 10 zunehmen.

Aha! Jetzt sehe ich, daß mein Freund recht hat und worauf dies beruht. Die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Palindromen ist immer 110. Da das kleinste Palindrom (1001) und ebenso die Zahl 110 durch 11 teilbar sind, trifft dies also für alle vierziffrigen Palindrome zu. Abgesehen davon, daß man das alles noch sauber aufschreiben muß, ist die Sache damit gelaufen.

Oder etwa nicht? Umfaßt mein Lösungsvorschlag alle von mir betrachteten Spezialfälle? Sehen wir uns das genauer an! Wenn man tatsächlich alle vierziffrigen Palindrome dadurch erhält, daß man permanent 110 zu 1001 hinzuaddiert, müssen alle mit einer 1 enden. Doch das ist ganz und gar nicht der Fall! Beispielsweise ist 7557 unbestreitbar ein Palindrom, endet aber auf einer 7. Was ist da schiefgelaufen? Meine Spezialisierung hat mich zu einer Gesetzmäßigkeit geführt, auf die ich meine gesamte Lösung aufgebaut habe. Unglückseligerweise erfaßt diese Gesetzmäßigkeit aber nicht alle Palindrome, denn offenbar führt sie ja zu der falschen Aussage, daß alle vierziffrigen Palindrome mit einer 1 enden. Es war einfach falsch, von drei Beobachtungen auf den allgemeinen Fall zu schließen. Glücklicherweise kann uns eine weitere Spezialisierung aus der Misere befreien. Sehen wir uns dazu eine Liste mit aufeinanderfolgenden Palindromen an:

Palindrome	1881	1991	2002	2112	2222	2332
Differenzen	110	11	110	110	110	110

Dieses Mal gehe ich mit größerer Vorsicht ans Werk; ich bin diesmal eher skeptisch als zuversichtlich. Die zugrundeliegende Gesetzmäßigkeit scheint darin zu bestehen, daß sich aufeinanderfolgende Palindrome um 110 unterscheiden, es sei denn, die Tausender-Ziffer ändert sich. In diesem Fall beträgt der Unterschied nur 11. Weitere Versuche scheinen diesen Sachverhalt zu erhärten; in gleichem Maße wächst meine Zuversicht, nun auf dem richtigen Wege zu sein. Somit hat das Heranziehen von Beispielen erneut dazu geführt, eine Struktur zu erhellen. Es ist nun allerdings nötig, ihr Vorliegen allgemein nachzuweisen. Dies kann etwa so vonstatten gehen:

Beweisführung:

Aufeinanderfolgende Palindrome, die dieselbe Tausender-Ziffer haben, müssen auch in der Einer-Ziffer übereinstimmen. Daher unterscheiden sie sich nur in der zweiten und dritten Position, und zwar jeweils genau um 1. Die Differenz zwischen ihnen ist also gerade 110.

Haben zwei aufeinanderfolgende Palindrome dagegen unterschiedliche Tausender-Ziffern, so können sie offenbar durch Addition von 1001 (dadurch werden die erste und die letzte Ziffer angepaßt) und anschließende Subtraktion von 990 (zur Anpassung der beiden mittleren Ziffern) ineinander übergeführt werden. Aber offenbar gilt $1001 - 990 = 11$; dies stimmt mit den bei den Beispielen gemachten Beobachtungen überein.

In beiden Fällen sind die aufgetretenen Differenzen durch 11 teilbar. Wenn daher das kleinste vierziffrige Palindrom durch 11 teilbar ist, so sind es alle. Da $1001 = 11 \cdot 91$ gilt, ist somit die Behauptung bewiesen.

Wir wollen uns noch einmal in Erinnerung rufen, welche Spezialfälle herangezogen wurden:

Zunächst einmal habe ich davon profitiert, daß ich mir Klarheit darüber verschafft habe, wie typische vierziffrige Palindrome aussehen.

Die dabei untersuchten Beispiele stützten die Behauptung meines Freundes.

Die systematische Untersuchung von speziellen Beispielen vermittelte mir eine Vorstellung davon, weshalb die Teilbarkeitseigenschaft vorliegt.

Weitere Untersuchungen zwangen mich zwar dazu, meine erste Hypothese zu verwerfen, führten dann aber zum Endergebnis.

Der Hauptvorteil der Spezialisierung besteht also darin, daß sie sehr leicht und auf verschiedenartigste Weise angewendet werden kann. Somit ist sie ein sehr effektives Werkzeug für die Mathematik.

Der soeben skizzierte Beweis ist übrigens bei weitem nicht der eleganteste, doch das war zunächst auch gar nicht angestrebt. Der erste Lösungsweg, den man findet, ist selten der, den man in einer Ausarbeitung angeben würde. Wenn Sie über größere Erfahrung in Mathematik und den dort gebräuchlichen Schreibweisen verfügen, ist ein deutlich schnellerer Zugang möglich. Abstrakt gesehen ist ein vierziffriges Palindrom doch von der Form ABBA, wobei A und B beliebige Ziffern sind. Die so dargestellte Zahl hat den Wert

$$\begin{aligned}
1000A + 100B + 10B + A &= (1000+1)A + (100+10)B \\
&= 1001A + 110B \\
&= 11 \times 91A + 11 \times 10B \\
&= 11(91A + 10B)
\end{aligned}$$

Sollten Sie bei dieser Argumentation Schwierigkeiten haben, so vollziehen Sie sie doch einfach konkret für $A=3$ und $B=4$ nach. Wählen Sie sodann so lange andere Werte für A und B , bis sie zu dem oben beschriebenen symbolischen Kalkül eine Beziehung gefunden haben.

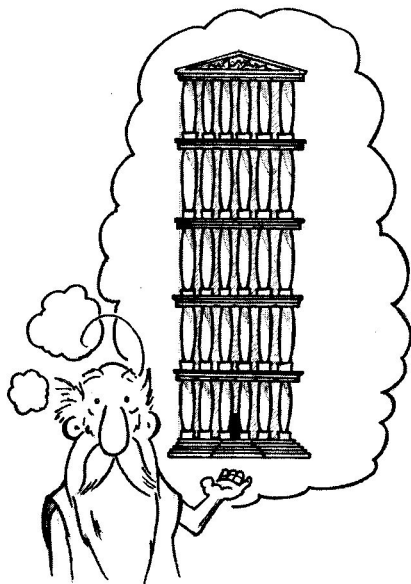
Elegante Lösungen wie die, die wir soeben betrachtet haben, verraten offensichtlich nichts mehr darüber, an Hand welcher Spezialfälle sie möglicherweise aufgedeckt wurden. Statt dessen wird mit algebraischen Methoden eine allgemeine Beweisführung erbracht. Voraussetzung dafür, daß man einen derartigen Beweis selber finden kann, ist allerdings eine hinreichende Vertrautheit mit den entsprechenden mathematischen Begriffsbildungen, wie hier etwa der Dezimalschreibweise, der Einführung von und dem Rechnen mit A und B und dergleichen. Mit anderen Worten: Es ist nötig, daß man mit der abstrakten Schreibform $ABBA$ umgehen kann. Ich muß sowohl mit den Palindromen als auch mit der für sie verwendeten Schreibweise sicher hantieren können. Eine derartige Vertrautheit kann am Anfang nur erzielt werden, wenn man den Übergang vom Konkreten zum Abstrakten schafft und so mit wachsender Erfahrung einen immer tieferen Einblick in zunächst fremdartige Sachverhalte bekommt.

Verallgemeinerungen

Obwohl der letzte Abschnitt schwerpunktmäßig der Untersuchung von Spezialfällen gewidmet war, sind wir nicht darum herum gekommen, auch das Gegenstück, nämlich das Verallgemeinern, mit ins Spiel zu bringen. Darunter versteht man die Methode, basierend auf einigen wenigen Tatsachen für eine große Klasse von Fällen den wahren Sachverhalt zu erschließen.

Verallgemeinerungen sind das Lebenselixier der Mathematik. So interessant auch spezielle Ergebnisse für sich sein mögen, besteht das Hauptanliegen doch stets im Aufspüren von ganz allgemeinen Resultaten. Wenn wir in unserem Beispiel KAUFHAUS die Situation für einen Ausgangsbetrag von 100 DM überblicken, so mag das für unser konkretes Problem hinreichend sein; viel wichtiger ist aber die Erkenntnis, daß der Endpreis stets unabhängig von der Reihenfolge von Steuerabzug und Rabattgewährung ist.

Der erste Schritt zur Verallgemeinerung besteht vielfach schon darin, daß Sie eine gewisse Gesetzmäßigkeit errahnen, selbst dann, wenn



Sie diese noch gar nicht konkret artikulieren können. Nachdem ich die Aufgabenstellung in KAUFHAUS für einige Beträge durchgespielt hatte, beobachtete ich, daß der Endpreis stets von der Reihenfolge von Steuerabzug und Rabattgewährung unabhängig war. Das ist die zugrundeliegende Gesetzmäßigkeit, also die angestrebte Verallgemeinerung. Ich vermutete nämlich, daß sich dies für jeden beliebigen Preis so verhält. Nachdem ich die eigentliche Rechnung geschickt niedergeschrieben hatte, war es ein Leichtes, für den Preis das Symbol P einzuführen und damit den allgemeinen Sachverhalt nachzuweisen.

Die Verallgemeinerung braucht allerdings nicht auf dieser Stufe stehenzubleiben. Was passiert zum Beispiel, wenn sich der Steuersatz ändert oder ein anderer Rabatt gewährt wird? Spielt die Reihenfolge jetzt eine Rolle?



----- Probieren Sie es, falls dies noch nicht geschehen ist -----

Ich hoffe, Sie können leicht aus unserer früheren Rechnung ersehen, daß die verwendeten Prozentsätze vollkommen unerheblich sind. Es ist gerade eine der Hauptstärken der Mathematik, daß sie die symbolische Erfassung von solchen allgemeinen Fragestellungen erlaubt. In unserem Fall können wir für den Rabattsatz die Variable R und für den

Steuersatz das Symbol S einführen. Schließlich und endlich können wir den Ausgangspreis mit P bezeichnen. Dies führt zu:

Rabatt zuerst: Sie zahlen $P(1-R)(1+S)$ DM;

Steuer zuerst: Sie zahlen $P(1+S)(1-R)$ DM.

Diese beiden Beträge sind natürlich stets gleich, denn bei der Multiplikation kommt es ja nicht auf die Reihenfolge der Faktoren an. Die Einführung der Buchstaben gestattet uns eine kurze und präzise Argumentation für ganze Beispielklassen (hier für alle denkbaren Rabatt- bzw. Steuersätze und jeden denkbaren Ausgangsbetrag). Allerdings ist die Einführung eines derartigen formalen Kalküls bei weitem nicht so unproblematisch wie vielfach gemeint wird; sie steht und fällt damit, daß man mit den Symbolen genauso gut umgehen kann wie mit den Zahlen, die durch sie dargestellt werden.

KAUFHAUS illustriert in einfacher Form das ständige Wechselspiel zwischen Spezialisierung und Verallgemeinerung. Dieses Wechselspiel ist für die gesamte Mathematik grundlegend. Die Spezialisierung legt den Grundstock, auf den die Verallgemeinerung aufgebaut wird. Wenn man einen ersten Zusammenhang erraten kann, hat man bereits eine gewisse Arbeitshypothese. Man hat dabei nicht einfach ins Blaue hinein geraten, sondern stützt sich bereits auf einiges Beobachtungsmaterial. Weitere Untersuchungen können diese Hypothese stützen oder zu Fall bringen. Der Versuch, die Vermutung zu beweisen, führt zu weiteren Verallgemeinerungen. Jetzt geht es ja nicht mehr primär darum, den wahren Sachverhalt zu erraten, sondern darum, ihn definitiv herzuleiten oder zu beweisen. Beim Beispiel KAUFHAUS war der erste Verallgemeinerungsschritt, daß ich vermutet habe, der Endpreis sei von der Reihenfolge unabhängig. Dies war das Was. Um das nachzuweisen, habe ich den genauen Rechengang analysiert und mich somit um das Warum gekümmert.

Am Beispiel PALINDROME können Sie zwei weitere wichtige Aspekte für das Aufstellen von Verallgemeinerungen erkennen. Oft ist es nämlich so, daß eine systematische Suche nach Beispielen ein zentrales Hilfsmittel für eine spätere Verallgemeinerung darstellt. Eine etwa vorhandene Grundstruktur zeigt sich nämlich an sorgfältig ausgewählten Beispielen viel eher als an rein zufällig herangezogenen. Damit ist freilich auch eine große Gefahr verbunden. Man kann nämlich leicht zu der Ansicht verführt werden, eine einmal aufgespürte Gesetzmäßigkeit müsse immer gelten, obwohl sie nur für gewisse Teilbereiche zutrifft. So habe ich beim Beispiel PALINDROME in meiner ersten Euphorie den Fall übersehen, daß die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Palindromen durchaus auch einmal 11 sein kann. Das lag einfach daran, daß in meiner Beispielsammlung der Fall gefehlt hat, daß zwei aufeinanderfolgende Palindrome verschiedene Tausender-Ziffern haben. Hüten Sie sich vor dem Irrglauben, eine aufgespürte schöne Grundstruktur bewahre Sie davor, sorgfältig

vorzugehen. Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit sind das tägliche Brot der Mathematik. Es ist genauso schädlich, wenn man sich in seine Arbeitshypothese verliebt, wie wenn man zu hasenherzig ist, auch einmal einfach eine Vermutung aufzustellen. Manchmal ist es schwierig, diese beiden extremen Positionen gegeneinander abzuwägen. Auf der einen Seite steht die Bereitschaft, eine bestimmte Hypothese zur Arbeitsgrundlage zu machen, auf der anderen Seite aber steht die Furcht, bei einem möglichen falschen Raten in einen Abgrund zu springen. Mit diesem Dilemma werden wir uns in den Kapiteln 5 und 6 auseinandersetzen.

Machen Sie sich Notizen!

Bevor wir uns weitere Beispiele ansehen, möchte ich Sie damit vertraut machen, wie Sie Ihre Vorgehensweisen dokumentieren können. Der Grund, daß ich das gerade an dieser Stelle tue, besteht darin, daß Sie nun damit beginnen sollten, sich Aufzeichnungen zu machen. Nur so können Sie nämlich in aller Regel sicherstellen, daß Sie einen Überblick über das behalten, was Sie sich bereits erarbeitet haben. Später können Sie Ihre Notizen durchsehen und analysieren. Wenn Sie Ihre Erkenntnisse niederschreiben, machen Sie sie sich zugleich bewußt, und dies wird Ihnen bei Ihrer mathematischen Arbeit weiterhelfen.

In erster Linie sollten Sie sich vornehmen, folgende drei Dinge aufzuzeichnen:

- 1) Alle wesentlichen Gedanken, die Ihnen bei einem Lösungsversuch eingefallen sind.
- 2) Alle Lösungsversuche, die Sie unternommen haben.
- 3) Wie Sie eine bestimmte Lösungsstrategie gefühlsmäßig einschätzen.

Da kommt offensichtlich einiges auf Sie zu, doch es lohnt sich tatsächlich. Insbesondere haben Sie dann eine Beschäftigung, wenn Sie an einer bestimmten Stelle nicht mehr weiterkommen: schreiben Sie hin, daß Sie dort hängen. Die Erkenntnis, wo genau Sie hängengeblieben sind, kann schon der erste Schritt zur Überwindung dieser Hürde sein. Wenn Sie Ihre Gedanken und gefühlsmäßigen Einschätzungen niederschreiben, werden Sie auch nicht mehr so sehr durch das aufreizende Weiß des vor Ihnen liegenden Papiers frustriert.

Wenn Sie erst einmal einen Anfang gefunden haben, nimmt oft alles einen guten Fortgang. Gerade dann, wenn Ihnen die Arbeit von der Hand geht, ist es wichtig, daß Sie Ihre Lösungsversuche schriftlich festhalten, denn es ist leicht, den Faden zu verlieren. Außerdem

sollte man am Beginn einer langen Rechnung niederschreiben, weshalb man sie überhaupt unternimmt. Schließlich dürfte es zu den Übelsten Erfahrungen gehören, wenn man nach langem Mühen zu einem Zwischenergebnis gelangt ist und nicht mehr weiß, was man tut, geschweige denn warum ("Just when I nearly had the answer, I forgot the question"). Ich möchte Ihnen vorschlagen, daß Sie sich angewöhnen, in Zukunft bei der Bearbeitung aller Probleme in diesem Buch Notizen zu machen. Lassen Sie sich nicht davon abschrecken, wieviel doch jeweils festzuhalten ist, Im weiteren Verlauf werde ich Ihnen immer wieder Hinweise dafür geben, was Sie zweckmäßigerweise protokollieren sollten. Der beste Zeitpunkt, mit Aufzeichnungen zu beginnen, ist sofort. Machen Sie sich also bitte Notizen, während Sie die nächste Aufgabe bearbeiten. Vermeiden Sie dabei eine buchhalterische Beschreibung Ihrer Aktivitäten. Zunächst genügen einige kurze Stichpunkte, die als Gedächtnisstützen herangezogen werden können. Denken Sie stets daran, geeignete Beispiele heranzuziehen und geschickt zu verallgemeinern. Vergleichen Sie aber Ihren Lösungsweg mit meinem erst dann, wenn Sie glauben, daß Sie alle Ihre Möglichkeiten erschöpft haben. Wundern Sie sich aber nicht darüber, daß mein Lösungsvorschlag wesentlich formaler ausfällt als der Ihre.

FLICKENMUSTER:

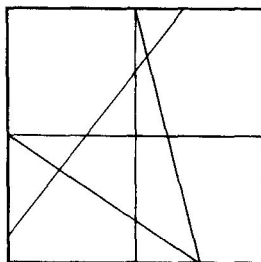
Gegeben sei ein Quadrat. Ziehen Sie mehrere gerade Linien durch sein Inneres, so daß das Quadrat in mehrerer Teilbereiche zerlegt wird. Die eigentliche Aufgabe besteht dann darin, die dadurch abgegrenzten Bereiche so zu färben, daß benachbarte Gebiete verschieden gefärbt sind. Dabei sollen Gebiete, die nur in einem Punkt aneinander stoßen, nicht als benachbart gelten. Wie viele verschiedene Farben benötigen Sie mindestens?



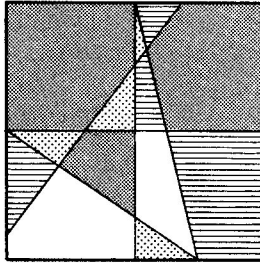
- Probieren Sie es. Notieren Sie Ihre Gedanken und Einschätzungen. -
- Lesen Sie meine Kommentare nur, wenn Sie nicht mehr weiterkommen. -

Ein Lösungsvorschlag:

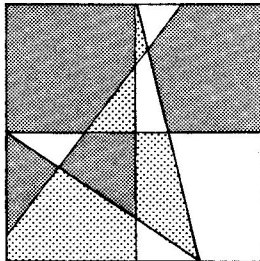
Was ist genau gefragt? Untersuchen Sie ein spezielles Beispiel, um sich den Sachverhalt klarmachen zu können:



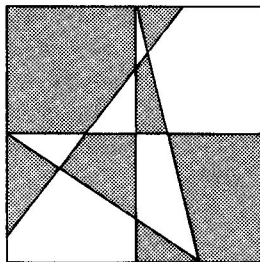
Die in diesem Beispiel eingezeichneten Linien zerteilen das Quadrat in 13 Bereiche. Ich weiß, daß ich benachbarte Gebiete verschieden einfärben muß. Eine Möglichkeit, dies zu tun, sieht so aus:



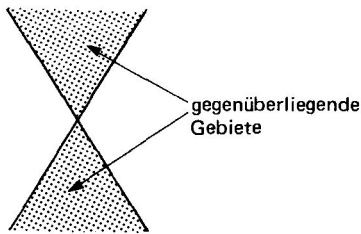
Unser Ziel ist es bekanntlich, die Minimalzahl von Farben aufzuspüren, die für die Einfärbung bei jeder beliebigen Zahl von willkürlich eingezeichneten geraden Linien ausreichend ist. In meinem Beispiel bin ich mit vier Farben ausgekommen. Kann dieser Wert vielleicht unterschritten werden? Versuchen wir einmal, mit nur drei Farben zu arbeiten:



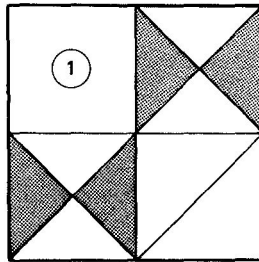
Das hat geklappt! Kommt man auch mit zwei Farben ans Ziel?



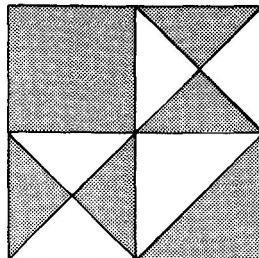
Das hat wieder geklappt! Da selbstverständlich eine Farbe allein nicht ausreichen würde, ist für diese ganz konkrete Ausgangssituation das Minimum der benötigten Farben gleich 2. Achten Sie dabei bitte auf folgendes: Als ich die einzelnen Bereiche mit nur zwei Farben eingefärbt habe, war ich immer gezwungen, genau gegenüberliegende Gebiete gleich einzufärben:



In dieser speziellen Situation genügten zwei Farben; es stellt sich aber die Frage, ob dies immer so ist. Sehen wir uns dazu ein weiteres Beispiel an. Wir wollen dabei versuchen, mit nur zwei Farben auszukommen. Als Ansatz, wie eine solche Färbung in der Praxis durchgeführt werden kann, befolgen wir die Regel, genau gegenüberliegende Gebiete gleich einzufärben:



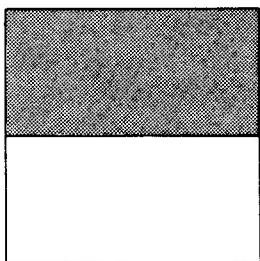
AHA! Das Gleichfärben von gegenüberliegenden Gebieten führt also nicht zum Erfolg. Hat man nämlich erst einmal die dunkel gekennzeichneten Gebiete eingefärbt, so steht man vor dem Problem, welche Farbe Bereich 1 bekommen soll. Offensichtlich ist sowohl die dunkle als auch die helle Färbung unmöglich. Das kann nun zweierlei bedeuten: entweder ich brauche eben doch mehr als nur zwei Farben, oder ich muß das strikte Gleichfärben von gegenüberliegenden Gebieten bleibenlassen. Doch welchen Weg sollen wir jetzt beschreiten? Nun, naheliegend ist es doch auf alle Fälle, zu versuchen, auf irgendeine Art mit zwei Farben auszukommen. Das hat auch tatsächlich Erfolg:



Bei diesem erfolgreichen Versuch habe ich beobachtet, daß nach Einfärbung von einem einzigen Teilbereich alles andere wie von selbst gegangen ist; natürlich müssen ja die unmittelbar benachbarten Gebiete die jeweils andere Farbe erhalten. Das ist so eine Art "Nachbarschaftsregel". Ich fühle mich nun erneut dazu ermutigt, zu glauben, daß zwei Farben ausreichend sind. Dies ist ein Versuch, die Antwort zu erraten.

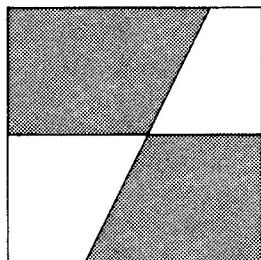
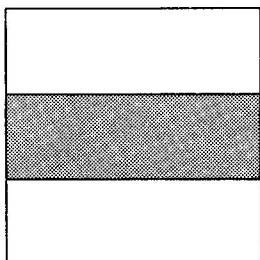
Natürlich steht diese Vermutung momentan noch auf recht schwachen Füßen. Wie kann ich mich nun davon überzeugen, daß sie richtig ist? AHA! Es ist doch sicher zweckmäßig, die Sache systematisch anzugehen, indem ich Zug um Zug Linien in das zunächst leere Quadrat einzeichne:

Eine Linie:



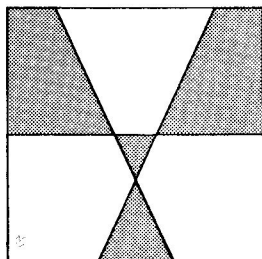
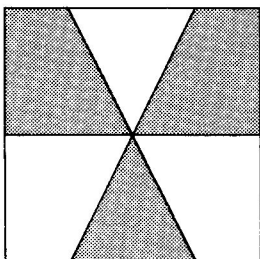
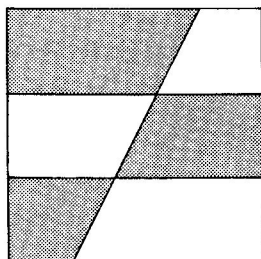
zwei Farben genügen

Zwei Linien:



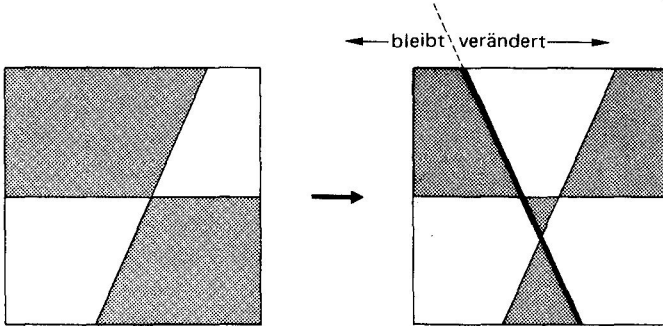
zwei Farben genügen

Drei Linien:

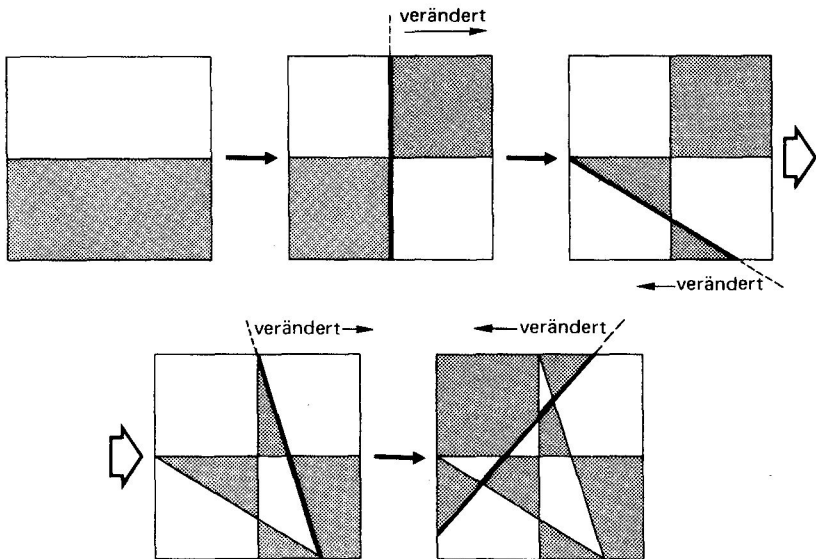


AHA! Bei diesem systematischen Vorgehen beginne ich einzusehen, weshalb zwei Farben ausreichend sein könnten. Dies ist der Übergang vom Was zum Warum. Wenn ich eine neue Linie hinzufüge, so werden of-

fenbar einige der alten Gebiete in zwei Teile geteilt. Alle Gebiete, die auf einer willkürlich festgesetzten Seite der neuen Linie liegen, sollen ihre alte Färbung behalten; die auf der anderen Seite anzutreffenden Gebiete werden dagegen konsequent umgefärbt. Sehen Sie sich das einmal für den Fall an, daß drei Linien vorliegen:



Überprüfen Sie das erneut! Testen Sie diese Methode, indem Sie versuchen, unser erstes Beispiel nach diesem Bauprinzip aufzubauen (das ist die Untersuchung eines weiteren Spezialfalls):



Sie werden feststellen, daß auch dieses Beispiel mit unserer Methode erfolgreich bearbeitet werden kann. Ich bin jetzt davon überzeugt, daß ich am Ziel bin. Das ganze Quadrat wird offenbar wie vorgeschrieben gefärbt, weil

- 1) die Teilbereiche auf jeder Seite einer neu eingezeichneten Linie sachgerecht gefärbt sind, da hier ja die alte Farbeinteilung beibehalten worden ist;

- 2) die Färbung entlang der neuen Linie gerade so eingerichtet worden ist, daß es zu keinen Konflikten kommen kann.

War es eigentlich ein reiner Zufall, daß das systematische Einfärben des ersten Quadrats genau zum selben Muster geführt hat wie meine spielerischen Versuche? Was würde geschehen, wenn ich die Linien in irgendeiner anderen Reihenfolge eingezeichnet und die so entstehenden Gebiete nach meinem Rezept eingefärbt hätte? Wieviele verschiedene Lösungen gibt es überhaupt bei diesem speziellen Beispiel oder - noch ehrgeiziger gefragt - bei jedem beliebigen Beispiel? Würde sich am Ergebnis etwas ändern, wenn an Stelle von Geraden ganz beliebige Linien zugelassen wären? Was passiert, wenn wir von einer beliebigen Fläche und nicht speziell von einem Quadrat ausgehen? Ich fordere Sie dringend dazu auf, sich mit einigen von diesen Fragen auseinanderzusetzen. Nur wenn Sie eine spezielle Lösung in einem größeren Zusammenhang sehen können, kommen Sie zu einem vertieften Problemverständnis.



----- Beschäftigen Sie sich jetzt damit! -----

Die andere wichtige Methode, wie Sie zum besseren Verständnis und zur angemessenen Einschätzung einer Lösung gelangen können, besteht darin, sich die Zeit zu nehmen, um das Erreichte noch einmal kritisch zu durchdenken. Dazu sind Ihre Aufzeichnungen ein unerlässliches Hilfsmittel, denn es ist erstaunlich, wie unzuverlässig das Gedächtnis der meisten Menschen bei derartigen Dingen ist. Es hat keinen Sinn, mühsam zu rekonstruieren, was Sie eigentlich getan haben müßten; entscheidend ist vielmehr, was Sie tatsächlich getan haben. Anregend kann es etwa sein, Ihre Vorgehensweise mit der meinen zu vergleichen. Natürlich haben Sie wesentlich weniger aufgeschrieben als ich, und in der Tat ist der im Buch wiedergegebene Text weitaus umfangreicher als meine ursprünglichen Notizen. Das Gerüst ist allerdings dasselbe geblieben. Mit großer Wahrscheinlichkeit haben Sie natürlich andere Beispiele betrachtet. Ebenso gut ist es möglich, daß Sie andere Färbungsstrategien gefunden haben. Es kommt nur darauf an, daß Sie sich darüber im klaren sind und daß Sie sich das bewußt machen, indem Sie diesen Befund in Worte fassen. Alles, was schwarz auf weiß dasteht, kann kritisch analysiert werden. Das gilt nicht in gleichem Maße, wenn Ihre Ideen nur vage in Ihrem Kopf herumgeistern. Zufälligerweise war mein erster Lösungsversuch falsch. Doch allein dadurch, daß ich meine Methode klar formuliert habe, war ich auch schon in der Lage, sie zu kontrollieren und geeignet zu modifizieren. Machen Sie sich klar, welchen Sinn das Betrachten von Spezialfällen hat:

Sie tasten sich an die Aufgabe heran und bekommen schließlich ein Gefühl für das Problem;

Sie bereiten die Grundlage für die Untersuchung des allgemeinen Falles vor;

Sie können damit Ihre Arbeitshypothesen testen.

Die Lösung selbst trägt in sich bereits den Keim zu einer ganzen Reihe von möglichen Verallgemeinerungen. Ausgehend von einigen konkreten Beispielen (dem Was) gelangte ich zu der Vermutung, daß zwei Farben immer ausreichend seien. Der Versuch, eine allgemeine Färbungsstrategie zu finden, führte mich zuerst zu der nicht allgemein durchführbaren Methode, gegenüberliegende Gebiete gleich zu färben, schließlich aber auch zu der letztlich erfolgreichen Vorgehensweise, die Linien sukzessive neu einzuführen und zu beobachten, was dabei passiert. Die dabei gewonnene Einsicht in die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten (dem Warum) stieß dabei gleichzeitig das Tor zu weiteren Verallgemeinerungen auf.

* * * * *

Bevor wir uns mit dem Beispiel FLICKENMUSTER auseinandergesetzt haben, habe ich Ihnen vorgeschlagen, Ihre Gedanken, Lösungsideen und gefühlsmäßigen Einschätzungen niederzuschreiben. Vielleicht haben Sie aus dem einen oder anderen Grund darauf verzichtet. Das wäre schade. Wenn Sie sich keine Notizen gemacht haben, haben Sie darauf verzichtet, etwas über sich selbst und über die Natur Ihrer Denkprozesse zu erfahren. Ich empfehle Ihnen nachdrücklich, daß Sie sich die Zeit zur sorgfältigen Bearbeitung der meisten hier behandelten Probleme nehmen. Ich könnte mir vorstellen, daß Sie bei der Lösung von FLICKENMUSTER auf Schwierigkeiten gestoßen sind. Auf den ersten Blick kommt Ihnen diese Einstellung vielleicht übertrieben und unzweckmäßig vor, aber wenn Sie sich hier eine gewisse Selbstdisziplin auferlegen, werden Sie später dafür belohnt werden. Um Ihnen das Anfertigen von Notizen zu erleichtern, möchte ich Ihnen nun detaillierter beschreiben, was man schriftlich festhalten sollte und was nicht. Ich schlage Ihnen dabei zugleich eine Gliederung vor, die für Sie sehr hilfreich sein kann. Wenn Sie sich diese zu eigen machen, wird sie Ihnen bei mathematischen Problemen stets nützlich sein. Wenn Sie sie dagegen nur oberflächlich zur Kenntnis nehmen, bleibt ihr Nutzen gering.

Kernpunkt dieser Schematisierung ist die Verwendung einiger Schlüsselworte. Wenn Sie diese benützen, werden Sie sie nach einiger Zeit mit früheren Erfahrungsinhalten in Verbindung bringen können. Diese Assoziationen rufen Ihnen ihrerseits erfolgreiche Lösungsstrategien ins Gedächtnis zurück. In diesem Kapitel schlage ich Ihnen zunächst vier Schlüsselbegriffe vor; diese Zahl wird sich im folgenden Kapi-

tel beträchtlich erhöhen. Die Gesamtheit der Schlüsselwörter bezeichne ich als Gliederung. Damit knüpfe ich an die weit verbreitete Gewohnheit an, bei wichtigen Büchern die entscheidenden Stichworte in Farbe an den Rand zu schreiben. Ihre Tätigkeit, sich Notizen anzufertigen, nenne ich Gliedern.

Die ersten vier Schlüsselworte, die ich Ihnen empfehlen möchte, lauten:

SCHWIERIGKEITEN, AHA, TEST, NACHBEREITUNG[®]

Ich bespreche sie nun im einzelnen:

SCHWIERIGKEITEN:

Immer wenn Sie bemerken, daß Sie nicht weiterkommen, sollten Sie das Wort SCHWIERIGKEITEN hinschreiben. Dies wird Ihr weiteres Vorgehen erleichtern, denn es zwingt Sie ja dazu, sich über die eigentliche Ursache Ihrer Probleme klarzuwerden. Das kann etwa so aussehen:

Ich verstehe ... nicht.

Ich weiß nicht, was ich in dem und dem Fall tun soll.

Ich sehe nicht, wie ich ...

Ich sehe nicht ein, warum ...

AHA:

Immer dann, wenn Ihnen etwas einfällt oder Sie zumindest glauben, daß Sie eine Idee haben, sollten Sie das aufschreiben. Auf diese Weise werden Sie später wissen, worin Ihre Idee bestanden hat. Es kommt sehr häufig vor, daß jemand eine gute Idee hat, die aber im Lauf der Zeit immer mehr verschimmt, bis sie schließlich ganz verloren ist. Auf jeden Fall werden Sie immer ein gutes Gefühl haben, wenn Sie AHA hinschreiben können, gefolgt von Bemerkungen wie:

Versuche ...

Vielleicht ...

TEST:

Kontrollieren Sie unverzüglich jede Berechnung und jede Schlußfolgerung.

Prüfen Sie sofort die Richtigkeit jeder Behauptung an einigen Beispielen.

Überzeugen Sie sich davon, daß Ihre Antwort tatsächlich die gestellte Aufgabe (vollständig) löst.

NACHBEREITUNG:

Wenn Sie alles erledigt haben, was Sie sich vorgenommen haben oder wozu Sie eben im Moment in der Lage sind, sollten Sie sich die Zeit nehmen, über das Erreichte nachzudenken. Selbst dann,

wenn Sie das Gefühl haben, nicht weit vorangekommen zu sein, hilft es Ihnen, wenn Sie Ihren aktuellen Kenntnisstand schriftlich fixieren. Auf diese Weise können Sie später sofort auf dem Bekannten aufbauen ohne sich erst mühsam klarmachen zu müssen, was eigentlich schon alles erledigt ist. Außerdem kann mitunter während der schriftlichen Ausarbeitung ein vorhandenes Hindernis überwunden werden. Folgende Dinge sollten Sie auf alle Fälle niederschreiben:

- die zentralen Ideen,
- die offenen Probleme,
- das, was Sie aus dem Bisherigen ersehen können.

Ich empfehle Ihnen mit allem Nachdruck, bei allen Lösungsversuchen eine derartige Gliederung auszuarbeiten. Dabei ist es Ihnen natürlich freigestellt, die hier vorgeschlagenen Schlüsselworte durch Formulierungen Ihrer Wahl zu ersetzen. Entscheidend ist lediglich, daß Sie mit den von Ihnen gewählten Vokabeln eine Reihe von Assoziationen verbinden können. Natürlich können Sie nicht immer alles gegenwärtig haben, was in einem bestimmten Einzelfall von Nutzen wäre. Bevor Sie sich aber darauf verlassen, daß Sie ein anderer aus Ihren Schwierigkeiten befreit, sollten Sie den Versuch unternehmen, sich an den eigenen Haaren aus dem Schlamassel zu ziehen. Eine gute Gliederung wird hier oft hilfreich sein, denn Sie bietet Ihnen die Möglichkeit, alte Erfahrungen anzuzapfen. Dazu werde ich in Kapitel 7 nähere Angaben machen.

Natürlich sollten Sie sich nicht sklavisch an eine bestimmte Form der Gliederung halten. Wenn Sie erst ein bißchen mit diesem Werkzeug vertraut sind, werden Ihnen die jeweils sinnvollen Schlüsselbegriffe ganz von selbst einfallen. Manchmal fürchten Sie sich vielleicht sogar davor, einen sich gerade herauskristallisierenden Gedanken vorschnell in Worte zu fassen, aus Sorge, ihn dadurch zu verlieren. In diesem Fall sollten Sie natürlich mit der Niederschrift warten. Auf der anderen Seite ist es freilich so, daß Sie Ihre Gedanken besser ordnen und ausdrücken können, wenn Sie Ihre Schlüsselbegriffe im Hinterkopf haben. Besonders sollten Sie es vermeiden, Ihre Gedanken kreuz und quer auf ein Blatt zu schmieren, wo gerade Platz ist. Hier eine strikte Disziplin einzuhalten, fällt jedem anfänglich schwer; wer sich aber dazu durchringen kann, wird davon stark profitieren können.

Nun haben wir genug über das Anfertigen von Notizen geredet. Üben Sie das Gliedern lieber in der Praxis, indem Sie das folgende Problem in Angriff nehmen. Denken Sie dabei stets daran, geeignete Spezialfälle zu betrachten und die nötigen Verallgemeinerungen vorzunehmen.

QUADRATE AUF DEM SCHACHBRETT:

Jemand behauptet, auf einem gewöhnlichen Schachbrett könne man 204 Quadrate aufspüren. Stimmt das?



----- Versuchen Sie es -----
----- Machen Sie eine Gliederung -----

Schwierigkeiten?

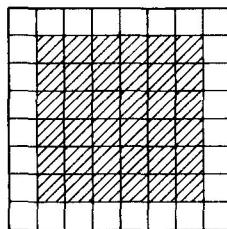
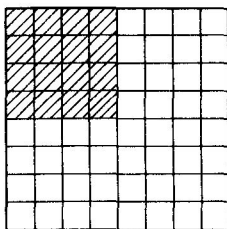
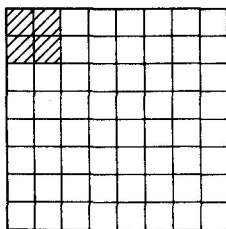
Auf den ersten Blick würde man davon ausgehen, daß ein normales Schachbrett aus 64 verschiedenen Quadraten aufgebaut ist. Kommen noch andere Quadrate in Betracht?

Sollte Ihnen die Situation zu unübersichtlich sein, dann betrachten Sie einfach geeignete Spezialfälle. Arbeiten Sie zum Beispiel mit kleineren "Schachbrettern".

Sie müssen die vorhandenen Quadrate systematisch abzählen; das kann prinzipiell auf mehrere verschiedene Arten geschehen. Suchen Sie zumindest zwei verschiedene Möglichkeiten, bevor Sie sich an die Ausarbeitung machen.

Eine denkbare Lösung:

Worin kann der Sinn der Aufgabenstellung bestehen? Zunächst einmal bin ich verblüfft, weil ein Schachbrett doch genau 64 verschiedene Felder besitzt. AHA! Der springende Punkt ist, daß einige Felder zu größeren Quadraten zusammengefaßt werden können. Sehen Sie sich etwa folgende Beispiele an:

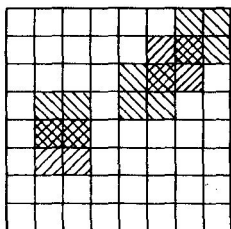


Mit dieser neuen inhaltlichen Interpretation des Begriffs Quadrat möchte ich nun zuerst die 1x1-Quadrate auszählen (davon gibt es natürlich 64 Stück), danach die 2x2-Quadrate, die 3x3-Quadrate und so fort. Dies führt zu einer Tabelle der Art:

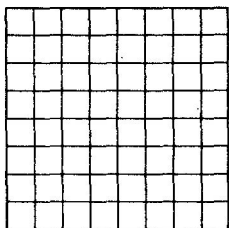
Größe	1 x 1	2 x 2	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8
Zahl	64							1

Zähle ich die Eintragungen aus, komme ich gerade auf den Wert 204.

Versuchen Sie, die Zahl der 2x2-Felder zu ermitteln. Sehen Sie sie an. Offenbar überlappen sie sich gegenseitig:



Auf jeden Fall muß ich die Zählung systematisch durchführen. Ein erster Ansatz kann etwa so aussehen, daß ich prüfe, wieviele Quadrate an die obere Seite anstoßen.



Ich zähle sieben Stück. Wieviele berühren die nächst tiefere Linie? Hier ergibt sich erneut der Wert 7. Und wieviele berühren die nächste Linie? Hoppla, was meine ich eigentlich damit, wenn ich sage, ein Quadrat berühre eine Linie? Das muß notwendigerweise heißen, daß ein Quadrat die Linie von unten berührt, denn sonst zähle ich ja gewisse Quadrate doppelt. Eine erneute Zählung ergibt daher wiederum den Wert 7. AHA! Offenbar wird jede Zeile also von sieben Quadraten berührt. Die Frage ist nur, wieviele Zeilen ich dabei zu berücksichtigen habe. Offensichtlich kann man insgesamt neun waagrechte Linien erkennen; die unteren beiden werden aber im Sinne unserer Sprachregelung von keinem 2x2-Quadrat berührt. Wir haben also sieben Linien, die von jeweils sieben Quadraten berührt werden, das gibt insgesamt also 49 2x2-Quadrate.

Größe	1 x 1	2 x 2	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8
Zahl	64	49						1

AHA! Zeichnet sich da nicht bereits eine gewisse Gesetzmäßigkeit ab? Offenbar sind die ersten beiden Eintragungen und die letzte doch Quadratzahlen. Insofern liegt die Vermutung nahe, dies könne auch bei allen anderen Fällen so sein. Präziser wird man erwarten, daß der Reihe nach $8*8$, $7*7$, $6*6$, ..., $1*1$ einzutragen sind. Insbesondere müßte es dann also 36 Quadrate vom Typ $3*3$ geben.

Das ist auszuTESTen, indem wir die $3*3$ -Quadrate auszählen. Wieviele von ihnen berühren die oberste Linie? Ich zähle 6, und damit bin ich praktisch am Ziel. Schließlich wird die Zahl der berührenden Quadrate für alle Zeilen abgesehen von den drei untersten gleich sein; das ergibt einen Wert von $6*6$, also 36. Allgemein wird es so sein, daß es $(9-k)*(9-k)$ Quadrate vom Typ $k*k$ gibt.

Nun kann ich die Tabelle vollends ausfüllen. Glücklicherweise stimmen meine bisherigen konkreten Ergebnisse mit meiner Arbeitshypothese überein, so daß dies mich in meiner Vermutung bestärkt (TEST).

Größe	1 x 1	2 x 2	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8	K x K
Zahl	64	49	36	25	16	9	4	1	$(9-k)^2$

So sehr ich mich auch über das bisher Erreichte freuen mag, bin ich doch noch nicht am Ziel. Schließlich war doch nach der Summe aller Quadrate gefragt, und man sollte nie vergessen, das Ausgangsproblem zu lösen. Rechnen wir also:

$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$,
und die Behauptung ist bewiesen.

Im Zuge der NACHBEREITUNG fällt mir auf, daß sich dieses Ergebnis auf Schachbretter mit N Zeilen und N Spalten übertragen läßt. Auf einem derartigen Brett wird man $(N+1-k)$ Quadrate vom Typ $k*k$ in einer Reihe vorfinden. Da außerdem $N+1-k$ Reihen zur Verfügung stehen, ergibt sich für sie eine Gesamtzahl von $(N+1-k)*(N+1-k)$. Summiert man über alle Quadratgrößen, so bekommt man:

$$1x1 + 2x2 + 3x3 + \dots + NxN .$$

Schlüssel zum Erfolg war die systematische Auszählung der $2*2$ -Quadrate. Diese Idee war verallgemeinerungsfähig und führte zum gewünschten Ergebnis. Als bleibende Erinnerung werde ich mir merken, wie aus einer zunächst unübersichtlichen Vielfalt von sich überlappenden Quadraten ein geordnetes Muster herauspräpariert werden konnte.

Vergleichen Sie nun Ihre Lösungsstrategie mit meiner. Wie ich bereits sagte, gibt es mehrere Möglichkeiten, die Aufgabe zu bearbeiten. Vielleicht haben Sie eine völlig andere Idee verfolgt. Eine

weitere hübsche Idee besteht beispielsweise darin, den Mittelpunkt eines jeden Quadrates einzufärben, wobei für jede Quadratgröße eine andere Farbe zu benutzen ist. Auf diese Weise erhält man ein ansprechendes geometrisches Muster, das sich leicht rechnerisch umsetzen läßt.

Analysieren Sie nun Ihren Lösungsweg im Hinblick darauf, an welchen Stellen Sie Spezialfälle untersucht und wo Sie Verallgemeinerungen vorgenommen haben. Achten Sie auch auf die vielfältige Art und Weise, wie in meinen Lösungsweg neue Gedanken eingeflossen sind. Die erste Erkenntnis bestand im Grunde darin, daß jede Zeile - wenn überhaupt - von gleich vielen 2×2 -Quadraten berührt wird. Später kam mir der tieferliegende Gedanke, daß je $9-K$ Quadrate vom Typ $K \times K$ eine Zeile berühren können. Auf diese Weise mußte ich nicht alle acht Fälle gesondert durchdenken. Außerdem führte es mich zu meinem Hauptergebnis, nämlich der Analyse der Situation bei Schachbrettern der Größe $N \times N$. Dies beruhte darauf, daß ich sah, an welcher Stelle und auf welche Weise die Brettgröße in die Rechnung Eingang gefunden hat. Können Sie ähnliche entscheidende Stellen in Ihrer Lösung ausmachen? Ich meine, daß meine Lösung ziemlich folgerichtig aus meiner prinzipiellen Vorgehensweise erwächst. Trotzdem entspricht der hier wiedergegebene Text nicht dem, was ich bei meinem ersten Lösungsversuch notiert habe. Vielleicht zeichnet sich meine Lösung dadurch aus, daß ich sehr viele Fragen herausdestilliert habe, die die Untersuchung gefördert haben.

Das prinzipielle Konzept der Gliederung sieht wie gesagt kein sklavisches Befolgen irgendwelcher Regeln vor. Ich denke, daß meine Lösung dies deutlich demonstriert hat. Es handelt sich vielmehr nur darum, die Arbeit an mathematischen Problemen gut zu organisieren und alte Erfahrungen sinnvoll mit einzubauen. Wenn Sie dadurch bei unkontrollierten geistigen Höhenflügen gebremst werden, ist dies kein Schaden; hilft es Ihnen aber dabei, momentane Schwierigkeiten zu überwinden, so ist dies sogar ein großer Fortschritt.

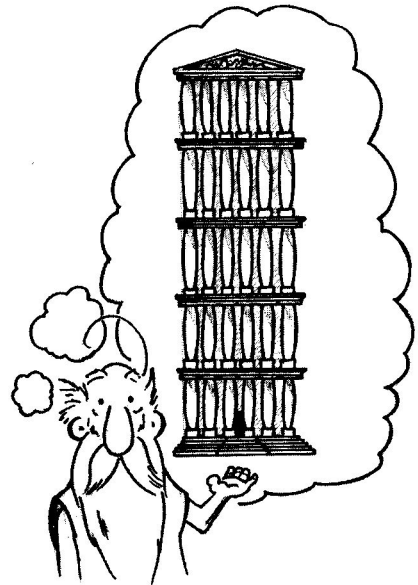
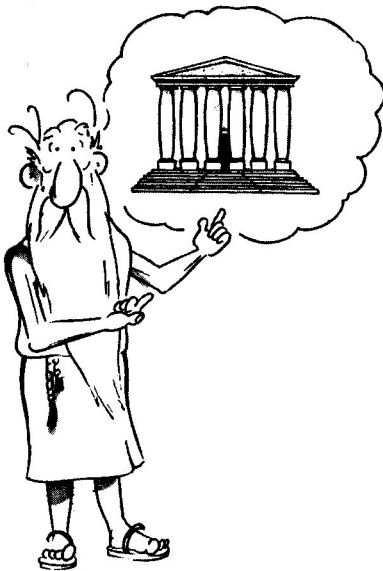
Rückblick und Vorausschau

In diesem Kapitel verfolge ich hauptsächlich die Zielsetzung, Ihnen das Aufsuchen von Spezialfällen und das Auffinden von Verallgemeinerungen nahezubringen. Es gibt wie gesagt keinen Grund, stundenlang ein weißes Blatt anzustarren oder der ersten besten Idee nachzujagen. Jeder, der mit einem neuen Problem konfrontiert ist, kann sich einige passende Beispiele zurechtlegen, um sich so mit der Fragestellung vertraut zu machen. Natürlich hat es keinen Zweck, dazu ganz abstruse Beispiele heranzuziehen. Nein, man sollte sich mit



ganz durchsichtigen Beispielen begnügen, ohne gleich die Lösung des Grundproblems anzuvisieren. Dann und nur dann kann das Betrachten von Spezialfällen ein Gefühl für den Sachverhalt erzeugen. Daran kann sich dann eine Lösung im engeren Sinn des Wortes anschließen. Ziel des Betrachtens von Spezialfällen ist es, ein Gefühl für Gesetzmäßigkeiten zu entwickeln. Dies be-

ruht darauf, daß man Gemeinsamkeiten zwischen verschiedenen Beispielen ins Auge faßt und andere Aspekte vernachlässigt. Sobald man eine derartige Gesetzmäßigkeit klar formulieren kann, wird daraus eine Vermutung. Diese ist dann auf ihre Richtigkeit hin zu untersuchen. All diese Vorgänge sind das Lebenselixier für das Arbeiten in der Mathematik.



Die Auswahl der Beispiele kann nach folgenden Gesichtspunkten erfolgen:

- ganz willkürlich, um ein Gefühl für die Sache zu bekommen;
- systematisch, um eine allgemeine Aussage vorzubereiten;
- unter der Zielsetzung, eine Vermutung auszutesten.

Sollte sich keine Gesetzmäßigkeit zeigen, so dient das Betrachten von Spezialfällen zur Vereinfachung der ursprünglichen Fragestellung. Dadurch können möglicherweise gewisse Fortschritte erzielt werden.

Unter einer Verallgemeinerung versteht man demgegenüber das Aufdecken einer Gesetzmäßigkeit, aus der man folgenden Nutzen ziehen kann: man erkennt den wahrscheinlichen Sachverhalt, hat also eine Vermutung; man sieht, weshalb das so ist, und hat somit die Grundlage für einen Beweis; man kann darauf schließen, unter welchen Voraussetzungen die Behauptung stimmt; dies kann zu einer allgemeineren Fragestellung oder zu einem anders gearteten Problem führen.

Ferner habe ich Ihnen vorgeschlagen, sorgfältig gegliederte Aufzeichnungen über Ihre Vorgehensweise anzufertigen. Dies soll Sie dazu befähigen, aus gemachten Erfahrungen zu lernen. Doch wenn dies auch nur dazu führt, daß Ihre Arbeit besser organisiert ist, ist es schon ein großer Fortschritt. Die weiteren Vorzüge dieser Methode werden im weiteren Verlauf dieses Buches sichtbar.

Bis jetzt haben wir folgende Schlüsselbegriffe als Gliederungshilfen verwendet:

SCHWIERIGKEITEN, AHA!, TEST, NACHBEREITUNG

Diese Schlüsselbegriffe bilden quasi das Gerüst zum Erstellen einer Lösung. Außerdem regen sie dazu an, ein gefundenes Ergebnis auf seine Richtigkeit hin zu überprüfen und nach Beendigung der Arbeit noch einmal alles zu überdenken. Das aber sind wesentliche Voraussetzungen dafür, daß Ihre Arbeit effektiver wird.

Viele Themen, die erst in späteren Kapiteln ausführlich besprochen werden, sind in diesem Kapitel bereits kurz angesprochen worden. In Kapitel 2 werden wir uns damit auseinandersetzen, in welche verschiedenen Phasen die Arbeit an einem Problem eingeteilt werden kann. Dies führt gleichzeitig zu weiteren Schlüsselbegriffen. Besonders wird betont, daß man vor der eigentlichen Bearbeitung einige Zeit investieren sollte, um das Problem in den Griff zu bekommen. Ebenso sollte man nach Fertigstellung der Lösung sorgfältig über das Erarbeitete nachdenken. Die Hauptphase, nämlich das Erstellen der Lösung im engeren Sinne, wird dann in den folgenden Kapiteln genauer untersucht werden. Doch immer wieder werden wir auf die Grundtechniken des Spezialisierens und Verallgemeinerns zurückkommen.

Vielleicht möchten Sie gerne die hier dargelegten Gedanken an einigen Aufgaben aus Kapitel 10 vertiefen; daher möchte ich Ihnen einige vorschlagen, die mit den hier besprochenen verwandt sind:

INNEN und AUSSEN
TEILBARKEIT
FINGERMULTIPLIKATION
RADARFALLE
QUADRATSUMMEN
FRITZ UND FRANZ

Denkvorgänge

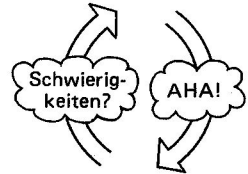
SPEZIALISIEREN

- willkürlich
- systematisch
- mit Zielsetzung

VERALLGEMEINERN

- was ist wahrscheinlich
- warum ist es wahrscheinlich
- wo ist es wahrscheinlich

Gliederung



TEST

NACHBEREITEN

Literaturhinweis:

Banwell, C., Saunders, K. und Tahta, D. Starting Points for Teaching Mathematics in Middle and Primary Schools. London: Oxford University Press (1972).